תרגיל 3, מבוא לפונקציות מרוכבות

1. נניח כי פולינום $p(z)=\sum_{k=0}^{n} p_k z^k$ חסום ע"י 1 בעיגול היחידה. הראה כי $|p_k|\le 1$. רמז: השתמש ב- : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{it})|\,dt\le 1$.

   מתי מתקיים השוויון?

2. נניח כי $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ונניח כי $z_n=\rho_n e^{i\theta_n}$ סדרה של מספרים מרוכבים שונים מאפס המקיימים $-\alpha\le\theta_n\le\alpha$. הראה כי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ מתכנסים או מתבררים ביחד.

3. לאילו ערכים של θ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$ מתכנס? השתמש במשפט אבל.

4. הוכח כי עבור $\theta\in R$, $0<r<1$:

$$C(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos(n\theta)=\frac{1-r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta},$$

$$S(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin(n\theta)=\frac{r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}.$$

   רמז: פשט את הביטוי $C(r,\theta)+iS(r,\theta)$.

5. מצא רדיוס התכנסות של הטורים הבאים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}z^n$.

6. בטא את $\cos(5\varphi)$, $\sin(3\varphi)$ באמצעות $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

7. בטא את החלק הממשי והמדומה של z^z באמצעות x,y ($z=x+iy$).

8. חשב $\sin i,\cos i,\tan(1+i)$. השתמש בהגדרה $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$.

9. הוכח $|\cos z|^2=\sinh^2 y+\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cosh 2y+\cos 2x)$.